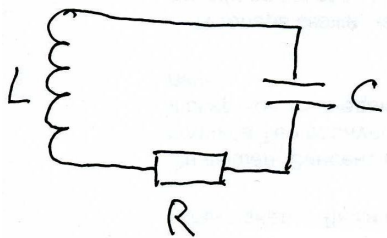


Раздел III. Колебания и волны.

Глава 2. Затухающие гармонические колебания.

1. Электрический колебательный контур с затуханием.



$$U_c + IR = \epsilon_{\text{самоинд}}$$

$$\frac{Q}{C} + \frac{dQ}{dt} R = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

$$\ddot{Q} + 2\beta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

-коэффициент затухания

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- собственная частота

2. Дифференциальное уравнение и его решение, описывающее затухающие колебания.

В большинстве случаев колебательные системы с затуханием описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

β - коэффициент затухания

ω_0 - собственная частота

x – отклонение системы от положения равновесия

При $\omega_0 > \beta$ решение имеет вид:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

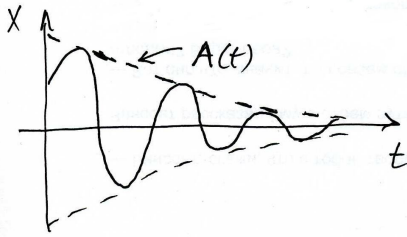
- частота затухающих колебаний

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

- амплитуда затухающих колебаний

$\phi(t) = \omega t + \varphi_0$ фаза колебания

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ период (время, за которое фаза меняется на 2π)



Зависимость энергии колебательной системы от времени описывается формулой:

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}$$

Такая зависимость от времени является следствием того, что $W(t) \sim A(t)^2$

Пример: электрический колебательный контур:

$$W = W_C + W_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_{\max}^2}{2C} + 0$$

$$\text{т. к. при } Q_{\max} : I = \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\text{т. е. } W \sim Q_{\max}^2$$

3. Некоторые характеристики затухающих колебаний.

а) Логарифмический декремент затухания.

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \Rightarrow \delta = \ln \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

$$\delta = \beta T$$

б) Добротность

$$Q = \frac{2\pi W(t)}{W(t) - W(t+T)}$$

Связь между добротностью и логарифмическим коэффициентом затухания:

$$Q = \frac{2\pi e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}$$

при малых δ :

$$Q \approx \frac{\pi}{\delta}$$

4. Аперидический затухающий процесс.

При больших коэффициентах затухания

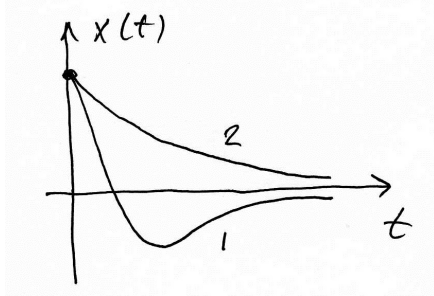
$$\beta > \omega_0$$

решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Затухание имеет не колебательный характер. Возможны два варианта апериодического затухающего процесса 1 и 2.



В электрическом колебательном контуре апериодический процесс реализуется, если сопротивление контура больше критического.

$$R > R_{кр}$$

Величина $R_{кр}$ получается из условия:

$$\beta = \omega_0 \Rightarrow \frac{R_{кр}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Вопросы.

1. Дифференциальное уравнение и его решение для затухающего колебательного процесса.
2. График затухающих колебаний.
3. Что такое логарифмический декремент затухания.
4. Что такое добротность.
5. Что такое апериодический затухающий процесс.
6. Что такое $R_{критическое}$.